

# スミスチャート

伝送線路を含め、高周波回路の色々な問題を数式を用いて解くことは、複素計算になりますのでかなり面倒になります。しかし、P. H. Smith の考案したスミスチャートを用いると、このような複雑な複素計算を、図表上で簡単に行うことができるようになります。計算尺では、積は対数をとると和に置き換えることができる性質を利用し、掛け算を中尺を動かすだけで簡単に行います。同じようにスミスチャートは、等角写像を利用し、高周波計算を簡単に行うことができる便利な道具の一つです。

## 反射係数と定在波比

スミスチャートの説明を行う前に、スミスチャートの基本となっている反射係数と定在波について説明します。負荷インピーダンス  $Z_r$  が線路インピーダンス  $Z_0$  に等しくない場合、入射波の一部は反射波となって電源側に戻ってきます。この反射波と入射波との間の干渉で、線路上には定在波が現れます。反射波と入射波の比を電圧反射係数と呼び、一般に  $r$ 、または  $V$  で表わされます。

## 反射係数

負荷の反射係数は、伝送線路の基本式から(1)式のように表されます。

$$\Gamma_r = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_r - I_r Z_0}{V_r + I_r Z_0} = \frac{Z_r - Z_0}{Z_r + Z_0} \quad \text{--- (1)}$$

終端開放線路では、 $Z_r = \infty$  ですから、 $r = +1$ 、また終端短絡線路では、 $Z_r = 0$  ですから、 $r = -1$ 、となります。

$$\begin{aligned} r = -1 &< \quad \text{先端短絡} \\ r = +1 &< \quad \text{先端開放} \end{aligned}$$

さらに、線路インピーダンスに等しい負荷インピーダンスを接続した場合、 $Z_r = Z_0$  ですから、

$$r = 0$$

となります。この(1)式が、インピーダンスと反射係数の関係を表わす重要な式になります。

## 定在波比

負荷インピーダンス  $Z_r$  が線路インピーダンス  $Z_0$  に等しくない場合、入射波の一部は反射波となって電源側に戻り、線路上に定在波が現れます。この場合、電圧の波腹の実効値と波節の実効値の比を電圧定在波比 (VSWR) といいます。定在波比は、(2)式のように表され、

$$S = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} \quad \text{--- (2)}$$

定在波と負荷インピーダンス、負荷反射係数の間には、次の(3),(4)式があります。

$$S = \frac{1+|\Gamma_r|}{1-|\Gamma_r|} = \frac{|Z_r + Z_0| + |Z_r - Z_0|}{|Z_r + Z_0| - |Z_r - Z_0|} \quad (3)$$

$$|\Gamma_r| = \frac{S-1}{S+1} \quad (4)$$

## 正規化インピーダンス

線路上の任意の位置から負荷側を見たインピーダンスは、伝送線路インピーダンスと比例関係にありますから、インピーダンス  $Z$  を用いる代わりに、 $Z$  と  $Z_0$  の比を用いることができます。これを正規化するといいます。正規化インピーダンスを次のように定義します。

$$z = r + jx$$

ただし、

$$z = Z / Z_0, r = R / Z_0, x = X / Z_0$$

ここで、 $Z_0$  は伝送線路の特性インピーダンスを示します。これより(1)式の反射係数は、(5)式のように表されます。

$$\Gamma = \frac{z-1}{z+1} \quad (5)$$

## 反射係数平面の図表

(5)式において、インピーダンス平面の値である  $r$  および  $x$  をパラメータとして、平面を表わす図表を考えます。つまり、インピーダンス平面での動きが、平面上でどのように動くかを考えます。(5)式で、の実数部を  $x$ 、虚数部を  $y$  とすると、

$$\Gamma = \frac{z-1}{z+1} = \frac{r-1+jx}{r+1+jx} = \Gamma_x + j\Gamma_y \quad (6)$$

となります。この式を理解するために、 $r$ 、 $x$  を片方ずつ可変して、インピーダンス平面と反射係数平面を並べて書いてみます。例えば、インピーダンス平面において、 $r=1$  固定で  $x$  のみを動かした場合の軌跡は、図 1-a のように、上下にのびる直線になります。(6)式に、 $r=1$  を代入し、 $x$  を少しずつ可変し、 $x$ 、 $y$  の値を平面上にプロットすると、図 1-b のように円になります。

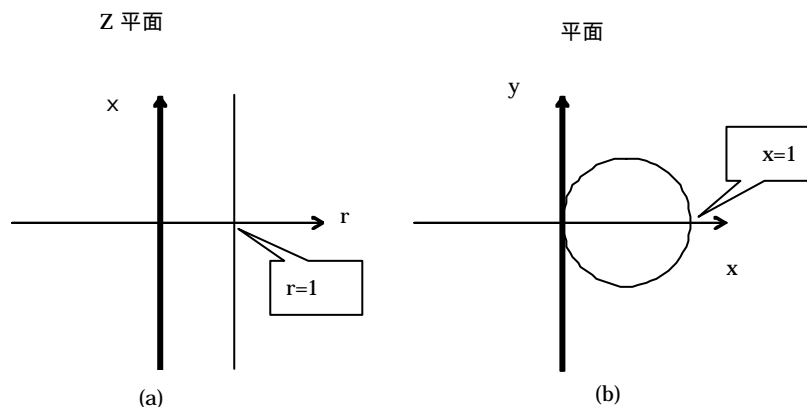


図 1  $r=1$  の時の  $z$  平面と 平面の関係

こんどは、 $x=1$  に固定し、 $r$  を  $-$  から  $+$  まで動かしてみると、図 2-b のように  $r > 0$  の範囲では、 $|\Gamma| < 1$  の円内で動き、 $r < 0$  の範囲では、一点破線の線上を動きます。

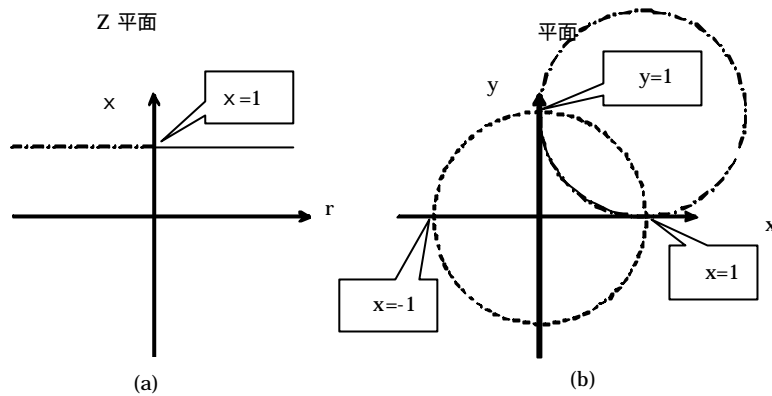


図2 x=1の時のz平面と平面の関係

このようにして、 $r = 0$ の時、 $r = 1$ の時、 $r = 2$ の時と平面上に軌跡を書き込んでいき、続いて、 $x = 0$ 、 $x = \pm 1$ 、 $x = \pm 2$ 云々と書き込んでいくと、図3のような図表が出来上がります。これが、基本的なスミスチャートです。

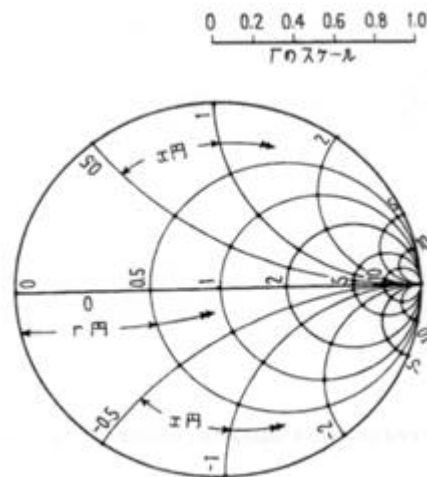


図3

インピーダンス平面の  $r$  および  $x$  の等値曲線は、円になってきますが、解析的にこれを証明することができます。(6)式を変形していくと、

$$\left( \Gamma_x - \frac{r}{r+1} \right)^2 + \Gamma_y^2 = \frac{1}{(r+1)^2} \text{---- (7-a)}$$

$$\left( \Gamma_x - 1 \right)^2 + \left( \Gamma_y - \frac{1}{x} \right)^2 = \frac{1}{x^2} \text{---- (7-b)}$$

の2つの式が得られます。これらの式は、円の方程式そのものであり、スミスチャートの等値曲線が円であることがわかります。(7-a)式は抵抗  $r$  が一定の場合の  $x$ 、 $y$  の円を表わし、円の中心は  $x$  軸上にあり、原点から  $r/(r+1)$  だけ移動します。また、円の半径は、 $1/(r+1)$  です。(7-b)式は、リアクタンス  $x$  が一定の場合の  $x$ 、 $y$  の円を表わし、その中心は、 $x = 1$  の垂直線上で、 $x=1/x$  だけ上下に移動します。また、円の半径は  $1/|x|$  になります。図3

のスミスチャートは、 $r > 0$  のエリアの図表ですが、これを  $r < 0$  の領域まで拡張することもできます。図 4 は負性抵抗領域まで表示したスミスチャートの例です。  $| \Gamma | > 1$  の領域は、インピーダンス平面では、 $r < 0$  の領域に相当します。

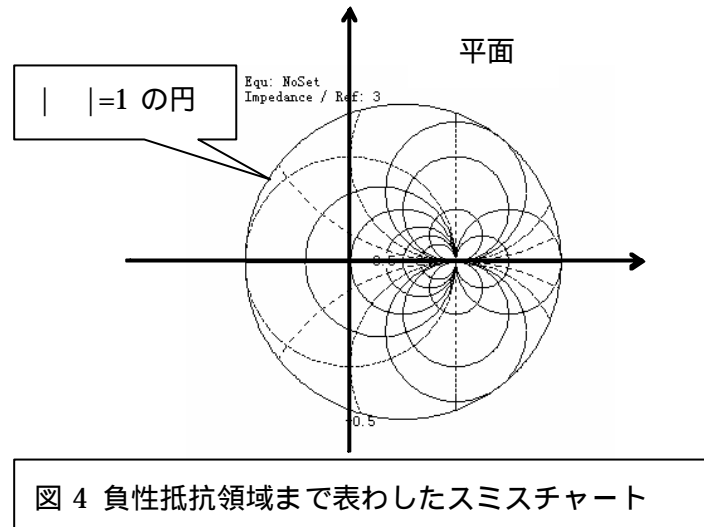


図 4 負性抵抗領域まで表わしたスミスチャート

## 波数

波数とは、その文字の示すが如く、波の数です。負荷に伝送線路が接続された場合、反射係数は線路上で、絶対値  $| \Gamma |$  を等しくし、位相のみを異にします。定在波電圧の最大値を起点として、電源方向あるいは負荷方向に向かって測った波数  $l_1/l$ 、 $l_2/l$  を用いて、線路上の任意の点の反射係数を表わすと、

$$\Gamma = |\Gamma| e^{-j4\pi(l_1/l)} \quad \text{--- (8-a)}$$

$$\Gamma = |\Gamma| e^{+j4\pi(l_2/l)} \quad \text{--- (8-b)}$$

となります。これを 平面上で表わすと、(8)式は反射係数ベクトルの回転であり、(8-a)式は時計方向の回転、(8-b)式は反時計方向の回転になり、図 5 のようになります。

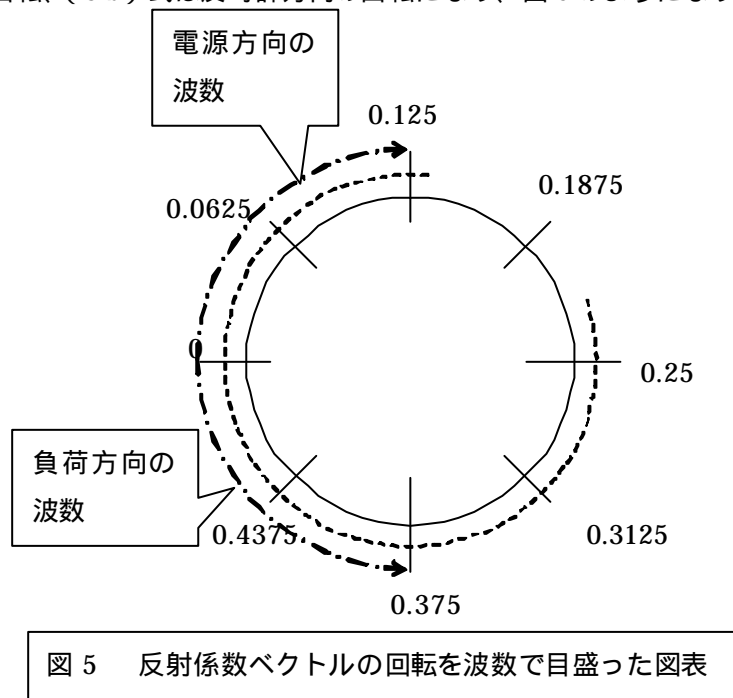


図 5 反射係数ベクトルの回転を波数で目盛った図表

## その他の目盛り

スミスチャートは、図 3 の図表に図 5 の波数を重ねたものが一般的ですが、さらに定在波比の円やリターンロスの円、Q の円なども書き込むこともできます。

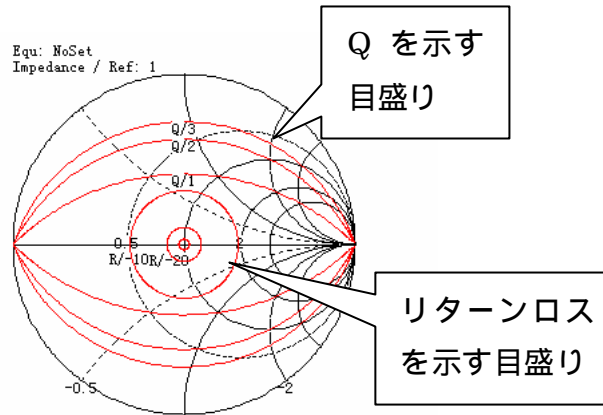


図 6 リターンロスと Q の目盛り

また、図 3 はインピーダンス平面の反射係数平面への等角写像でしたが、アドミッタンス平面を反射係数平面へ等角写像し、図 3 に重ねることにより、アドミッタンスの動きも簡単に把握できるようになります。アドミッタンス円は  $Y=1/Z$  を(7)式に代入し、 $\Gamma$  と Y の関係

$$\Gamma = \frac{1-Y}{1+Y} \quad (9)$$

を求めると、同様の図表を作ることができます。

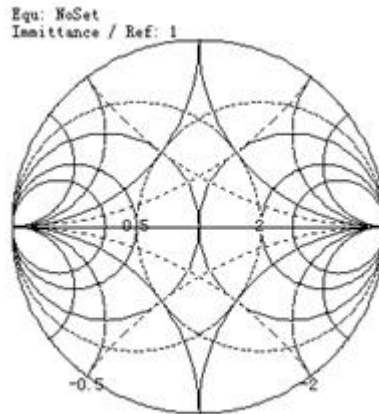


図 7 イミッタンスチャート

図 7 はインピーダンスチャートとアドミッタンスチャートを重ねたもので、イミッタンスチャートと呼ばれ、高周波の設計には多く用いられています。